***Pătrate perfecte. Metode de demonstrare a pătratelor perfecte.***

Prof. **Camelia Pîrvu**

Prof. **Maria Iancu**

Şcoala Gimnzială „Romul Ladea”

Oraviţa, Caraş-Severin

|  |  |
| --- | --- |
| **CONŢINUT:** | Pag. |
| **INTRODUCERE** | 1 |
| 1. Aspecte metodice ale predării pătratelor perfecte în gimnaziu | 2 |
| 1. Metode de a demonstra că un număr este sau nu pătrat perfect | 3-16 |
| 1. Greşeli frecvente ale elevilor întâlnite în încercarea de a arăta că un număr este pătrat perfect | 17 |
| 1. Selecţie de probleme din GM (comentarii, indicaţii, trimiteri la noţiunile prezentate) | 18-19 |
| **BIBLIOGRAFIE** | 20 |

**INTRODUCERE**

Introducerea noţiunii de pătrat perfect în programa şcolară se face la clasa a V-a. O dată ce elevii sunt familiarizaţi cu noţiunea respectivă la clasă, este necesară aprofundarea temei în orele de pregătire suplimentară în vederea participării la concursurile şcolare.

Principalele obiective care trebuie atinse ar putea fi enunţate astfel:

O1: ca elevii să-şi însuşească noţiunea de pătrat perfect (în mod deosebit la elevii clasei a V-a)

O2: să opereze cu proprietăţile şi metodele de demonstrare;

O3: să aplice aceste cunoştinţe în contexte variate.

***§1. Aspecte metodice ale predării pătratelor perfecte în gimnaziu***

**Definiţie:**

Un număr natural p se numeşte pătrat perfect, dacă există nu număr natural n astfel

încât p=n2 , cu alte cuvinte p este pătratul unui număr natural.

Exemple de pătrate perfecte:

1. 625 pentru că ;
2. 19981998, pentru că ;
3. 102n, pentrucă ;
4. n2; (n-1)4; (m-n+1)6; 302k,k; ;
5. , pentru că .

Şirul numerelor 0, 1, 4, 9, 16, 25, … se mai scrie 02, 12, 22, 32, 42, 52, … şi se

numeşte şirul numerelor naturale pătrate perfecte.

Considerăm tabelul:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 10 | … | 25 | … | 99 |
| n2 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | … | 100 | … | 625 | … | 9801 |

***Observaţie 1:***

Dacă numărul natural are o cifră, atunci pătratul său are o cifră sau două cifre;

dacă numărul numărul natural are două cifre, pătratul său are trei sau patru cifre; dacă numărul natural are n cifre atunci pătratul său are 2n-1 sau 2n cifre.

***Observaţie 2:***

Notând cu U(n) ultima cifră a numărului n şi cu U(n2) ultima cifră a lui n2, observă

că dacă  atunci .

De aici se deduce şi o metodă de a demonstra că un număr nu este pătrat perfect arătând că ultima cifră a acelui număr este din mulţimea .

Reamintim că:

, 

***Observaţie 3:***

Nu orice număr care are ultima cifră un element al mulţimii  este pătrat

perfect. Condiţia necesară ca un număr să fie pătrat perfect este ca ultima sa cifră să fie element din mulţimea de mai sus.

***§2. Metode de a demonstra că un număr este sau nu pătrat perfect***

**M1: Se poate arăta că un număr este pătrat perfect cu ajutorul definiţiei;**

Arătaţi că numerele de mai jos sunt pătrate perfecte:

1. 

*Soluţie:*



 E este pătrat perfect.

1. 

*Soluţie:*



 n este pătrat perfect.

1. 

*Soluţie:*



 A este pătrat perfect.

1. 

*Soluţie:*



 B este pătrat perfect.

1. 

*Soluţie:*



 N este pătrat perfect.

1. 

*Soluţie:*





 M este pătrat perfect.

1. 

*Soluţie:*



Calculăm suma 1+2+3+...+100.

1+2+3+...+100=[(1+100)🞝100]:2=(100🞝101):2=101🞝50=5050



 P este pătrat perfect.

1. 

*Soluţie:*



 E este pătrat perfect.

1. Se dau numerele:





Arătaţi că a şi b sunt pătrate perfecte,  .

Caz particular (pentru clasa a V-a): 



*Soluţie:*



 a este pătrat perfect.



 a este pătrat perfect.

Analog se tratează cazul particular.

**M2: pătrate perfecte în alte tipuri de probleme;**

1. Aflaţi  astfel încât numerele: , , , ,

 şi  să fie pătrate perfecte.

*Soluţie:*

*Soluţie I:*

 





sau 

*Soluţie II:*

Cum n+2 şi n+7 sunt de parităţi diferite rezultă că numărul  este număr neprim k2 este neprim k este neprim k=a🞝b.

Putem presupune fără a restrânge generalitatea că a<b. Obţine 

 şi a=2 şi b=3 iar n=2.

Restul exerciţiilor le lăsăm spre rezolvare cititorilor.

1. Aflaţi  astfel încât: , , ,  sunt pătrate perfecte.

*Soluţie I:*

Putem proceda ca ma sus, . Lăsăm soluţia pe seama cititorului.

*Soluţie II:*

 este pătrat perfect dacă , de unde .

În concluzie  este pătrat perfect pentru .

Analog pentru celelalte exerciţii.

1. Aflaţi  ( este un număr scris în baza zece) astfel încât , 

să fie pătrate perfecte.

*Soluţie:*

 este pătrat perfect dacă .

Analog celelalte exerciţii.

1. Determinaţi  astfel încât numerele:
2. x2-2x; b) x2-11x; c) x2-px unde p este număr prim dat sunt pătrate perfecte.

*Soluţie:*





1. Fie x2-px=k2, , p3, p-prim. Obţinem x2-px=k2  sau 4x2-4px+p2=4k2 +p2 (2x-p-2k)( 2x-p+2k)=p2.

Obţinem sistemele 

Rezolvând aceste sisteme obţinem , x=p, , x=0.

Observaţie: Cazul p=2 este punctual a) al problemei;

Cazul p=11 este punctual b) al problemei;

**M3 : O condiţie suficientă ca un număr să nu fie pătrat perfect este ca ultima**

**sa cifră să fie 2, 3, 7 sau 8.**

**Exemple:**

1. Arătaţi că numărul N=2000🞝n+2013,  nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*

Aflăm ultima cifră a numărului N

Deoarece 2000🞝n=10🞝200🞝nU(2000🞝n)=0 şi U(2013)=3

U(N)=U(0+3)=3 N nu este pătrat perfect.

1. Arătaţi că numărul P=2015🞝n+2017 nu este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

*Soluţie:*

Deoarece 2015   P nu este pătrat perfect.

1. Arătaţi că numărul  nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*



 C nu este pătrat perfect.

1. Arătaţi că numărul  nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*

Aflăm ultima cifră a fiecărui termen



Obţinem U(A)=U(1+4+7+6+5)=U(23)=3  A nu este pătrat perfect.

**M4: Ştim că orice pătrat perfect p, mai mare ca 1, este produs de puteri de numere**

**prime cu exponent par.**

De aici deduce: condiţia necesară şi suficientă ca un număr p să fie pătrat perfect

este ca atunci când conţine un factor prim el să conţină şi pătratul său. Pentru a arată că un număr nu este pătrat perfect arăt că acel număr conţine un factor prim dar nu-l conţine pe pătratul lui.

1. Arătaţi că numărul  nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*



a nu este pătrat perfect pentru că îl conţine pe 5 dar nu îl conţine pe 52.

1. Arătaţi că numărul b=1🞝2🞝3🞝…🞝100 nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*

Acest produs conţine factor prim pe 97 care apare o singură dată şi deci nu-l conţine pe

972, de aceea numărul dat nu poate fi pătrat perfect.

1. Arătaţi că numărul ce se obţine scriind la rând toate numerele naturale de la 1 până

la 2000 nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*

Înşirând toate numerele până la 2000 obţinem 12345…2000. Deoarece 1+2+3+4+5+…+1999+2000=[(1+2000)🞝2000]:2=(2001🞝2000):2=2001🞝1000=2001000, obţinem că 3|2001000, dar 9 nu divide 2001000 şi deci numărul obţinut nu este pătrat perfect.

1. Arătaţi că numărul natural având 1999 de cifre din care 499 sunt nule, iar celelalte

unităţi, nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*

Fie N numărul menţionat în enunţ. Deoarece suma cifrelor lui N este 1500 (el având 1500 cifre de 1), rezultă că 3|N dar 9 nu divide N şi ţinând cont de condiţia M2, numărul nu este pătrat perfect.

**M5: Se poate demonstra că un număr nu este pătrat perfect şi folosind “teorema**

**împărţirii cu rest”** şi anume:

Dacă un număr are una din formele:

1. 2p sau 2p+1, p , atunci pătratul său are forma 4k sau 4k+1;
2. 3p,3p+1 sau 3p+2, p , atunci pătratul său are forma 3k sau 3k+1;
3. 4p,4p+1, 4p+2 sau 4p+3, p , atunci pătratul său are forma 4k sau 4k+1;
4. 5p,5p+1, 5p+2, 5p+3 sau 5p+4, p , atunci pătratul său are forma 5k, 5k+1 sau 5k+4;
5. 5p,5p+1, 5p+2, 5p+3 sau 5p+4, p , atunci pătratul său are forma 5k, 5k+1 sau 5k+4;
6. 6p,6p+1,...6p+5, p , atunci pătratul său are forma 6k, 6k+1, 6k+3 sau 6k+4;
7. 7p,7p+1,...7p+6, p , atunci pătratul său are forma 7k, 7k+1, 7k+2 sau 7k+4;
8. 8p,8p+1,...8p+7, p , atunci pătratul său are forma 8k, 8k+1 sau 8k+4;
9. 9p,9p+1,...9p+8, p , atunci pătratul său are forma 9k, 9k+1, 9k+4 sau 9k+7; k 

Şi procedeul se poate continua.

Deci nu există pătrate perfecte de forma 3k+2, 4k+2, 4k+3, 5k+2, 5k+3, 6k+2, 6k+5,

7k+3, 7k+5, 7k+6, 8k+2, 8k+3, 8k+5, 8k+6, 8k+7, 9k+2, 9k+3, 9k+5, 9k+6 sau 9k+8, k .

Deducem de aici: **Condiţia necesară şi suficientă ca un număr să nu fie pătrat perfect este ca el sa aibă una din formele enumerate mai sus.**

***Observaţie 1:***

Nu orice număr de forma 3k, 3k+1, 4k, 4k+1, 5k, 5k+1, 5k+4, 6k, 6k+1, 6k+3, 6k+4, 7k, 7k+1, 7k+2, 7k+4, 8k, 8k+1,8k+4,9k, 9k+1, 9k+4 sau 9k+7, k  este pătrat perfect. Condiţia este doar necesară dar nu şi suficientă. Spre exemplu: 40=4k şi 41=4k+1, 91=3k+1 sau 91=9k+1, dar 40, 41 şi 91 nu sunt pătrate perfecte.

***Observaţie 2:***

Se demonstrează foarte simplu că un număr ce are una din formele de la a) la i) atunci pătratul său are una din formele mai sus menţionate.

Spre exemplu:

Dacă n=3p, p  n2=3k, k ;

Dacă n=3p+1, p  n2=(3p+1)2=32p2+2🞝3p+1=3k+1, k ;

Dacă n=3p+2, p  n2=(3p+2)2=32p2+2🞝3p🞝2+22=3k+1, k ;

***Observaţie 3:***

Reamintim că restul împărţirii unui număr natural prin 3 este egal cu restul împărţirii sumei cifrelor sale la 3 (Verificaţi!)

**Exemple:**

1. Suma cifrelor unui număr natural este 2003. Poate fi acest număr pătrat perfect?

*Soluţie:*

Ţinând cont de Observaţie 3, obţinem: 2003=3🞝667+2, deci 2003 este de forma 3k+2 care nu este pătrat perfect. Nu există aşadar pătrate perfecte cu suma cifrelor egală cu 2003.

1. Demonstraţi că suma pătratelor a trei, patru sau cinci numere întregi consecutive nu

poate fi pătrat perfect.

*Soluţie:*

Fie n-1, n şi n+1, n , trei numere întregi consecutive. Suma pătratelor lor este (n-1)2+n2+(n+1)2=n2-2n+1+n2 +n2+2n+1=3n2+2 care are forma 3k+2 şi care nu este pătrat perfect. Deci suma pătratelor a trei numere întregi consecutive nu este pătrat perfect.

Fie n-1, n, n+1 şi n+2 n , patru numere întregi consecutive. Suma pătratelor lor este (n-1)2+n2+(n+1)2+(n+2)2= 4(n2+n+1)+2=4k+2, k ; de unde rezultă că suma pătratelor a patru numere întregi nu este pătrat perfect.

Fie n-2, n-1, n, n+1 şi n+2 n , cele cinci numere întregi consecutive.

A= (n-2)2 +(n-1)2+n2+(n+1)2+(n+2)2= 5n2+10=5(n2+2), n .

Deoarece n2 nu se poate termina nici în 3 şi nici în 8 se deduce uşor că 25 nu divide A, ceea ce demonstrează că A nu este pătrat perfect.

1. Demonstraţi că dacă restul împărţirii unui număr natural prin 9 este unul din numerele

2, 3, 5, 6 sau 8, atunci acel număr nu poate fi pătrat perfect.

*Soluţie:*

Am văzut că dacă n=9k+r, unde , atunci prin ridicare la pătrat, se obţin resturile 0, 1, 4 sau 7, deci niciunul din numerele date.

1. Demonstraţi că restul împărţirii prin 12 al unui număr natural este unul din numerele 2,

3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 atunci acel număr nu poate fi pătrat perfect.

*Soluţie:*

Orice număr întreg are una din formele 12k+r , unde , iar pătratele acestora sunt de forma 12k, 12k+1, 12k+4 sau 12k+9 şi deci numărul nu poate fi pătrat perfect.

1. Arătaţi că niciun număr natural de două sau mai multe cifre nenule, toate egale, nu poate

fi pătrat perfect.

*Soluţie:*

Având în vedere că orice pătrat perfect se termină în una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6, sau 9, trebuie să analizăm doar numerele  şi .

Fie n  şi n 2.

Deoarece   nu este pătrat perfect.

Deoarece  şi  deducem că nici  şi nici nu este pătrate perfecte.

Având în vedere că  şi  şi nici îm aceste situaţii nu avem pătrate perfecte.

**Generalizare:  nu este pătrat perfect, .**

**M6: Condiţia necesară şi suficientă ca un număr să nu fie pătrat perfect este ca acel număr să fie cuprins între două pătrate perfecte consecutive.**

**Exemple:**

1. Demonstraţi că produsul a două numere naturale consecutive nenule nu poate fi

pătrat perfect.

*Soluţie:*

Fie n, n+1,  două numere naturale consecutive 

Dar  sau  şi deci n(n+1) nu este pătrat perfect.

1. Demonstraţi că numerele n2+n+1, n2+3n+1, (n+1)(n+4), n2+8n+17, n2+10n+26 şi

n4+n2+1 nu sunt pătrate perfecte, .

*Soluţie:*

*   nu este

pătrat perfect;

* 

 nu este pătrat perfect;

 şi  nu este pătrat perfect;

*  nu este pătrat perfect deoarece  şi analog

 nu este pătrat perfect deoarece 

*  şi n2, n2+1 sunt numere naturale consecutive 

nu este pătrat perfect.

**M7: Condiţia necesară şi suficientă ca un număr să nu fie pătrat perfect este ca acel**

**număr să aibă un număr par de divizori**

**Demonstraţie:**

Orice număr natural n se poate scrie unic sub forma , unde  sunt numere prime iar  numere naturale nenule. Reamintim că numărul divizorilor unui număr natural n este dat de formula.

Dacă n este pătrat perfect, atunci exponenţii  sunt, cu necesitate, numere pare, iar factorii  vor fi impare, deci produsul lor  va fi impar.

Dacă n nu este pătrate perfect atunci cel puţin unul dintre exponentul  este impar şi  este par, de unde rezultă că produsul  este par.

**Aplicaţii:**

1. Stabiliţi paritatea numărului divizorilor pentru numerele de forma:
2. 2015n+3, b) 2000n+8; c) 1005n+7; 

*Soluţie:*

1. Deoarece  2015n+3 nu este pătrat perfect  numărul divizorilor lui 2015n+3 este par.
2. şi c) analog.
3. Să se arate că ,  este pătrat perfect, unde numărul divizorilor lui n.

*Soluţie:*

Cazul I. Dacă n este pătrat perfect  n=k2,  care este pătrat perfect.

Cazul II. Dacă n nu este pătrat perfect, atunci el conţine în descompunere factori primi la putere impară,  şi  este par. Deci d(n)=2m,  şi este pătrat perfect.

**M8: O condiţie suficientă ca un număr să nu fie pătrat perfect este ca ultima**

**cifră să fie zero iar penultima să fie diferită de zero.**

**Exemple:**

1. Fie . Fără a efectua operaţiile aflaţi ultimele

trei cifre ale lui n şi arătaţi că n nu poate fi pătrat perfect.

*Soluţie:*

Reamintim că 



Deducem că ultimele trei cifre ale lui n sunt . Numărul dat nu este pătrat perfect deoarece nu există pătrate perfecte cu ultima cifră 0 şi penultima cifră diferită de 0, conform metodei de mai sus.

**M9: O condiţie suficientă ca un număr cu mai mult de două cifre să nu fie pătrat perfect este ca ultima cifră să fie 5 iar penultima cifră să fie impară sau diferită de 2.**

**Demostraţie:**

Fie  sau n=10p+5,  ultimele cifre ale lui n sunt 25.

***Observaţie 1:***

Nu orice număr care are la sfârşit 25 este pătrat perfect. Condiţia este necesară dar nu şi suficientă.

***Observaţie 2:***

Orice pătrat perfect care are ultima cifră 5 are peultima cifră pară.

**Exemple:**

1. Arătaţi că numărul  nu poate fi pătrat perfect.

*Soluţie:*

Deoarece numărul conţine factorii 2 şi 5 el va avea la sfârşit mai mult de două zerouri. Atunci ultimele două cifre ale lui n sunt 05 şi deci numărul nu este pătrat perfect.

**M10: O condiţie suficientă ca un număr cu mai mult de două cifre să nu fie pătrat perfect este ca ultimele două cifre ale numărului să fie impare.**

**Demonstraţie:**

Scriem numărul n sub forma . Ultimele două cifre ale lui n vor fi deci, ultimele două cifre ale lui .

Dacă , ultima cifră este impară, iar penultima are paritatea lui 20ab+p,  şi p reprezintă cifra zecilor lui b2. Rezultă că 20ab+p este par, deci penultima cifră este pară. Deducem deci că nu există pătrate perfecte având ultimele două cifre impare.

**M11: Condiţia necesară şi suficientă ca un număr să nu fie pătrat perfect este ca ecuaţia n=k2,  să nu aibă soluţii în .**

**Exemple:**

1. Demonstraţi că numerele de forma 8n-3,  nu sunt pătrate perfecte.

*Soluţie:*

Presupunem că 8n-3=k2, 8n=k2+3 deoarece p(p+1)+1 este număr impar ecuaţia 8n-3=k2 nu are soluţii în 8n-3 nu este pătrat perfect, .

**M12: Pentru a demonstra că un număr nu este pătrat perfect putem aplica şi metoda reducerii la absurd.**

**Exemple:**

1. Demonstraţi că numerele 91, 26, 15, 80 nu sunt pătrate perfecte.

*Soluţie:*

Vom demostra prin “metoda reducerii la absurd”

Presupunem că 91 este pătrat perfect 91=k2 unde  şi (m,n)=

 (1).



Înlocuind în (1)



fals. Presupunerea făcută este falsă, deci 91 nu este pătrat perfect.

1. Arătaţi că, oricare ar fi , numerele A=m2+4n şi B=n2+4m nu sunt simultan

pătrate perfecte.

*Soluţie:*

Vom demonstra prin “reducere la absurd” . Presupunem că există două numere

 astfel încât A şi B să fie pătrate perfecte. Deoarece expresiile A şi B sunt simetrice în m şi n, fără a restrânge generalitatea, putem considera că mn. În acest caz,  şi cum , rezultă că  B este pătrat perfect dacă şi numai dacă B=(n+1)2. Deoarece B=(n+1)2 conduce la n2+4m=n2+2n+1, de unde 4m=2n+1, ceea ce este imposibil, rezultă că presupunerea făcută este falsă, de unde obţinem că , numerele A şi B nu pot fi simultan pătrate perfecte.

1. Demonstraţi că numărul  nu este pătrat perfect.

*Soluţie:*

Vom rezolva problema prin “metoda reducerii la absurd”. Presupunem că  este

pătrat perfect. Obţinem:

- imposibil întrucât membrul

stâng este format din două numere consecutive (deci este număr par), în timp ce membrul drept este produsul a două numere naturale pare sau impare consecutive.

Dar nu există numere naturale pare care să fie scrise ca produs de două numere pare consecutive.

Absurditatea la care s-a ajuns provine din faptul că presupunerea făcută este falsă şi deci  nu este pătrat perfect.

***§3.* Greşeli frecvente ale elevilor întâlnite în încercarea de a arăta**

**că un număr natural este pătrat perfect**

1. Cea mai des întâlnită eroare este aceea că se studiază ultima cifră a numărului iar dacă

acesta este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 se trage concluzia greşită că numărul este obligatoriu pătrat perfect. Greşeala provine din faptul că ultima cifră a unui număr este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 este doar o condiţie necesară, însă nu şi suficientă.

Spre exemplu: 25=52 este pătrat perfect iar 35=5🞝7 nu este pătrat perfect.

1. Se ştie că un număr este pătrat perfect dacă se scrie ca exponent par a unui număr

natural. De aici se trage concluzia greşită că puterea cu exponent impar nu este pătrat perfect. Greşeala provine din faptul că dacă baza puterii este un număr pătrat perfect atunci şi numărul este pătrat perfect.

Spre exemplu: 43 este o putere cu exponent impar dar 64 este pătrat perfect:

43= (22)3=(23)2=82=64=p.p.

1. Se demonstrează că două numere sunt pătrate perfecte şi se concluzionează că suma

(sau diferenţa) lor este de asemenea pătrat perfect. Însă acest lucru este valabil doar pentru numere pitagorice.

Spre exemplu: 32+42=52 dar 32+52=9+25=34 nu este pătrat perfect.

102-82=62 dar 102-52=75 nu este pătrat perfect

1. Se ştie că produsul a două pătrate perfecte este pătrat perfect şi se transfer această

proprietate şi asupra câtului a două pătrate perfecte, însă acest lucru nu mai este general valabil.

Spre exemplu: 81:9=9=32, dar 81:16=5,0625 nu este pătrat perfect.

1. Se ştie că pătratul unui număr natural este de forma 3k, 3k+1, 4k, 4k+1, 5k, 5k+1, 5k+4,

7k, 7k+1, 7k+2, 7k+4, etc. şi se trage concluzia greşită că şi reciproca este adevărată. În schimb, nu orice număr care poate fi scris în una din formele de mai sus este şi pătrat perfect.

Spre exemplu: 64=5🞝12+4 este pătrat perfect, dar 54=5🞝10+4 nu este pătrat perfect.

***§4.* Selecţie de probleme din GM**

**(comentarii, indicaţii, trimiteri la noţiunile prezentate)**

E1: Arătaţi că nu există pătrate perfecte de forma , unde .

GM Nr.4, 2014

*Indicaţie:* . Se arată uşor că  dă restul  la împărţirea cu 37 şi deci nu se divid cu 37.

E2: Arătaţi că, pentru orice număr întreg n2, numărul  este suma a patru pătrate perfecte distincte.

GM Nr.4, 2014

*Indicaţie:* Se scrie  şi se obţine imediat cerinţa.

E3: Arătaţi că numărul  este pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural.

SGM Nr.4, 2014

*Indicaţie:* Se scrie  şi aplicând definiţia se obţine imediat cerinţa.

E4: Arătaţi că orice număr natural cu 2007 divizori este un pătrat perfect.

SGM Nr.4, 2014

*Indicaţie:* vezi §2. M5 demonstraţia

E5: Determinaţi numerele întregi x pentru care  este pătratul unui număr natural.

SGM Nr.4, 2014

*Indicaţie:* (vezi §2. M2, ex.2 )  de unde se obţine x.

E6: Determinaţi n număr natural astfel încât  şi  să fie pătrate perfecte.

SGM Nr.4, 2014

*Indicaţie:* Se notează  şi , se obţine 4k2-p2=33(2k-p)(2k+p)=33 de unde se determina k, p, n.

E7: Arătaţi că  este pătrat perfect, oricare ar fi cifra nenulă x.

SGM Nr.4, 2014

*Indicaţie:* (vezi §2. M1) Se obţine .

E8: Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul  este pătrat perfect.

GM Nr.3, 2014

*Indicaţie:* (vezi §2. M3) Se obţine  de unde se determină n.

E9: Fie  şi numerele , , , .

Arătaţi că: a) numerele a, b, c, d nu sunt prime; b) a+b+c+d este pătrat perfect.

SGM Nr.3, 2014

*Indicaţie:* (vezi §1.1. M1) Efectuând calculele şi aplicând definiţia se obţine 

E10: Câte de numere de forma , cu cifre distincte, au proprietatea că  este pătrat perfect?

SGM Nr.2, 2014

*Indicaţie:* Se obţine a-c de forma k2 şi b orice cifră diferită de a şi c, de unde se determină toate cazurile posibile

E11: Aflaţi toate numerele naturale x pentru care x+2014 este pătrat perfect, iar x+14 este puterea a patra a unui număr natural.

SGM Nr.2, 2014

*Indicaţie:* Notând x+2014=k2 şi x+14=p4 se obţine (k-p2)(k+p2)=2000 de unde se obţin soluţiile.

E12: Determinaţi  ştiind că numărul  este pătrat perfect.

SGM Nr.1, 2014

*Indicaţie:* , , ,

 şi ,  şi mai departe  şi deci:

 şi  şi 

**BIBLIOGRAFIE:**

1. Traian Cohal, “Vă place matematica?”, Ed. Moldova 1991;
2. I. Cucurezeanu, “Probleme de aritmetică şi teoria numerelor”, Ed. Tehnică, Bucureşti 1976;
3. Victor Raischi, “Matematică, probleme şi teste pentru clasele V-VIII”, Ed. Sigma, Bucureşti 1994;
4. Olimpiade şi concursuri şcolare 2000-2014
5. Seria B Gazeta Matematică.