**Selecții probleme de sinteză**
**- material pentru clasa a VII-a –**

1. Aflați câte numere naturale scrise în baza zece îndeplinesc simultan următoarele condiții:
a) fiecare număr are 6 cifre;
b) suma cifrelor fiecărui număr este 9;
c) 4 dintre cifrele fiecărui număr sunt 2,0,0,4.

(OJM 2004)

2. Fie mulțimea A= $\left\{n \in N^* / 1 < \sqrt{1+\sqrt{n}} < 2\right\}$
a) Enumerați elementele mulțimii A;
b) Determinați $n \in N^*$ astfel încât $\sqrt{n} \cdot \left|1-\sqrt{1+\sqrt{n}}\right| < 1$

(OJM 2004)

3. Arătați că pentru orice $a \in \{0,1,2,...,9\}$ suma

$$S_a = \overline{a}^{2005} + \overline{1a}^{2005} + \overline{2a}^{2005} + ... + \overline{9a}^{2005}$$ este divizibilă cu 10.

(OJM 2005)

4. Notăm cu $m_a$, $m_g$ media aritmetică, respectiv media geometrică a nr. reale strict pozitive x şi y.
a) Dacă $m_a+m_g=y-x$, determinați valoarea raportului $\frac{x}{y}$;
b) Arătați că există o singură pereche de numere naturale nenule diferite (x,y) pentru care $m_a+m_g=40$.

(OJM 2005)

5. O urnă conține bile albastre şi bile roşii. O persoană a inventat următorul joc: extrage succesiv bile, până când constată că pentru prima dată numărul de bile albastre este egal cu numărul de bile roşii extrase. La unul dintre jocuri constată că în final au fost extrase 10 bile şi că nu există 3 bile de aceeaşi culoare extrase consecutiv. Să se arate că în această situație a cincea şi a şasea bilă extrasă au culori diferite.

(OJM 2007)

6. Fie a şi b numere naturale cu $b > a \geq 2$. Să se arate că dacă numărul a+k este prim cu numărul b+k, pentru orice k=1,2,...,b-a atunci a şi b sunt numere consecutive.

(OJM 2007)

7. Fie n un număr compus. Folosind eventual faptul că a≥1 este divizor al lui n dacă şi numai dacă $\frac{n}{a}$ este divizor al lui n, să se arate că există numere naturale k>1 şi $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$>1 astfel ca:

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k}\right)$$

(OJM 2007)

8. Să se arate că $n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right), \forall n \in N^*$

(OJM 2008)

9. Într-o şcoală sunt 10 clase. Fiecare elev dintr-o clasă se cunoaşte cu exact câte un elev din celelalte 9 clase. Să se arate că toate clasele au acelaşi număr de elevi.

(OJM 2008)

10. Fie $M = \{1,2,4,5,7,8,...\}$ mulțimea numerelor naturale care nu se divid cu 3. Suma a 2n elemente consecutive ale mulțimii M este 300. Să se determine valorile posibile ale lui n.

(OJM 2008)

11. Fie $m,n \in N^*$ astfel încât $5|(2^n + 3^m)$. Să se arate că $(2^m + 3^n)$este divizibil cu 5.

(OJM 2009)

12. Fie a şi b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferenţa a două pătrate dacă şi numai dacă ab este număr par.

(OJM 2009)

Indicaţii/soluţii:

1. 180 numere;

2. b) $\left|1-\sqrt{1+\sqrt{n}}\right| = \sqrt{1+\sqrt{n}} - 1$ ... $n \in \{1,2\}$

3. $(a+b)^n = M_a + b^n$

4. a) $\frac{x}{y} = \frac{1}{9}$; b) $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 40 \Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = 80$ sau $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = 80 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} = 4\sqrt{5}$, de unde $\sqrt{5x}+\sqrt{5y} = 20$. De aici $\sqrt{5y} = \frac{400+5y^2-5x}{40}$. Din $\sqrt{5y} = \frac{400+5y^2-5x}{40} \in Q \Rightarrow \sqrt{5y} \in Q$ rezultă $\sqrt{5y}$ natural, adică $y = 5m^2$, $x = 5n^2, m,n \in N$, rezultă m+n=4 şi cum n<m avem n=1 şi m=3, deci x=5, y=45;

5. Fără a restrânge generalitatea, considerăm că ultima bilă extrasă este roşie. Atunci a noua este tot roşie, altfel extragerea s-ar fi oprit după 8 bile. A opta bilă este tot albastră, altfel ultimele 3 ar avea aceeaşi culoare. A şaptea bilă este roşie, altfel extragerea s-ar fi oprit după doar 6 bile. Acum, dacă bilele 5 şi 6 sunt roşii, se obţin 3 consecutive roşii, fals. Dacă bilele 5 şi 6 sunt albastre, atunci extragerea se opreşte după doar 4 bile, contradicţie. În concluzie, bilele 5 şi 6 sunt diferit colorate.

6. Fie n=b-a. Din ipoteză avem (a+k,b+k)=(a+k,b+k-a-k)=(a+k,n)=1, oricare ar fi k=1,2,...,n. Secvenţa a+1, a+2, ..., a+n are n numere consecutive, rezultă că unul dintre numere se divid cu n. Atunci n=1, altfel n nu ar fi prim cu acesta, deci numerele a şi b sunt consecutive şi satisfac cerinţa.

7. Dacă k este numărul de divizori proprii ai lui n şi cum n este compus rezultă k>1. Alegem $1 < a_1 < a_2 < ... < a_k$ divizorii proprii ai lui n, atunci $\frac{n}{a_1} > \frac{n}{a_2} > ... > \frac{n}{a_k}$ reprezintă tot divizorii proprii ai lui n, de unde rezultă concluzia.

8. Se notează $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ şi se demonstrează relaţia obţinută.

9. Alegem arbitrar două clase X şi Y; este suficient să arătăm că acestea au acelaşi număr de elevi. Să presupunem prin absurd că în clasa X sunt mai mulţi elevi decât în clasa Y. Cum fiecare elev din clasa X cunoaşte exact un elev din clasa Y, vor exista măcar doi elevi din clasa X – numiţi de exemplu A şi B – ce cunosc acelaşi elev C din clasa Y. Atunci elevul C cunoaşte din aceeaşi clasă X doi elevi, anume A şi B în contradicţie cu ipoteza.

10. Elementele mulţimii A sunt nedivizibile cu 3, deci au forma 3k+1, 3k+2, 3k+4, 3k+5, ...

11. Discutaţi pe ultima cifră

12. $(\Rightarrow)$(reducere la absurd: presupuneţi că ab este impar); $(\Leftarrow)$(studiaţi parităţile posibile ale lui a şi b şi folosiţi (reţineţi) următorul rezultat $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$