

Selecții probleme de sinteză
- **material pentru clasa a VII-a –**

1. Aflați câte numere naturale scrise în baza zece îndeplinesc simultan următoarele condiții:
- fiecare număr are 6 cifre;
 - suma cifrelor fiecărui număr este 9;
 - 4 dintre cifrele fiecărui număr sunt 2,0,0,4.

(OJM 2004)

2. Fie mulțimea $A = \{n \in N^* / 1 < \sqrt{1 + \sqrt{n}} < 2\}$

- a) Enumerați elementele mulțimii A;

b) Determinați $n \in N^*$ astfel încât $\sqrt{n} \cdot |1 - \sqrt{1 + \sqrt{n}}| < 1$

(OJM 2004)

3. Arătați că pentru orice $a \in \{0,1,2,\dots,9\}$ suma

$$S_a = a^{-2005} + 1a^{-2005} + 2a^{-2005} + \dots + 9a^{-2005}$$

este divizibilă cu 10.

(OJM 2005)

4. Notăm cu m_a, m_g media aritmetică, respectiv media geometrică a nr. reale strict pozitive x și y .

$$\frac{x}{y}$$

- a) Dacă $m_a + m_g = y - x$, determinați valoarea raportului $\frac{x}{y}$;

- b) Arătați că există o singură pereche de numere naturale nenule diferite (x,y) pentru care $m_a + m_g = 40$.

(OJM 2005)

5. O urnă conține bile albastre și bile roșii. O persoană a inventat următorul joc: extrage succesiv bile, până când constată că pentru prima dată numărul de bile albastre este egal cu numărul de bile roșii extrase. La unul dintre jocuri constată că în final au fost extrase 10 bile și că nu există 3 bile de aceeași culoare extrase consecutiv. Să se arate că în această situație a cincea și a șasea bilă extrasă au culori diferite.

(OJM 2007)

6. Fie a și b numere naturale cu $b > a \geq 2$. Să se arate că dacă numărul $a+k$ este prim cu numărul $b+k$, pentru orice $k=1,2,\dots,b-a$ atunci a și b sunt numere consecutive.

(OJM 2007)

7. Fie n un număr compus. Folosind eventual faptul că $a \geq 1$ este divizor al lui n dacă și numai dacă

$$\frac{n}{a}$$

$\frac{n}{a}$ este divizor al lui n , să se arate că există numere naturale $k > 1$ și $a_1, a_2, \dots, a_k > 1$ astfel ca:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \right)$$

(OJM 2007)

8. Să se arate că $n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \geq (n+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right), \forall n \in N^*$

(OJM 2008)

9. Într-o școală sunt 10 clase. Fiecare elev dintr-o clasă se cunoaște cu exact câte un elev din celelalte 9 clase. Să se arate că toate clasele au același număr de elevi.

(OJM 2008)

10. Fie $M = \{1,2,4,5,7,8,\dots\}$ mulțimea numerelor naturale care nu se divid cu 3. Suma a $2n$ elemente consecutive ale mulțimii M este 300. Să se determine valorile posibile ale lui n .

(OJM 2008)

11. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $5 \mid (2^n + 3^m)$. Să se arate că $(2^m + 3^n)$ este divizibil cu 5.

(OJM 2009)

12. Fie a și b două numere naturale. Să se arate că numărul $a^2 + b^2$ este diferența a două pătrate dacă și numai dacă ab este număr par.

(OJM 2009)

Indicații/soluții:

1. 180 numere;

2. b) $\left| 1 - \sqrt{1 + \sqrt{n}} \right| = \sqrt{1 + \sqrt{n}} - 1 \dots n \in \{1, 2\}$

3. $(a + b)^n = M_a + b^n$

4. a) $\frac{x}{y} = \frac{1}{9}$; b) $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 40 \Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = 80$ sau $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 80 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\sqrt{5}$, de

unde $\sqrt{5x} + \sqrt{5y} = 20$. De aici $\sqrt{5y} = \frac{400 + 5y^2 - 5x}{40}$. Din $\sqrt{5y} = \frac{400 + 5y^2 - 5x}{40} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{5y} \in \mathbb{Q}$

rezultă $\sqrt{5y}$ natural, adică $y = 5m^2$, $x = 5n^2$, $m, n \in \mathbb{N}$, rezultă $m+n=4$ și cum $n < m$ avem $n=1$ și $m=3$, deci $x=5$, $y=45$;

5. Fără a restrânge generalitatea, considerăm că ultima bilă extrasă este roșie. Atunci a noua este tot roșie, altfel extragerea s-ar fi oprit după 8 bile. A opta bilă este tot albastră, altfel ultimele 3 ar avea aceeași culoare. A șaptea bilă este roșie, altfel extragerea s-ar fi oprit după doar 6 bile. Acum, dacă bilele 5 și 6 sunt roșii, se obțin 3 consecutive roșii, fals. Dacă bilele 5 și 6 sunt albastre, atunci extragerea se oprește după doar 4 bile, contradicție. În concluzie, bilele 5 și 6 sunt diferite colorate.

6. Fie $n=b-a$. Din ipoteză avem $(a+k, b+k) = (a+k, b+k-a-k) = (a+k, n) = 1$, oricare ar fi $k=1, 2, \dots, n$. Secvența $a+1, a+2, \dots, a+n$ are n numere consecutive, rezultă că unul dintre numere se divide cu n . Atunci $n=1$, altfel n nu ar fi prim cu acesta, deci numerele a și b sunt consecutive și satisfac cerința.

7. Dacă k este numărul de divizori proprii ai lui n și cum n este compus rezultă $k > 1$. Alegem

$1 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ divizorii proprii ai lui n , atunci $\frac{n}{a_1} > \frac{n}{a_2} > \dots > \frac{n}{a_k}$ reprezintă tot divizorii proprii ai lui n , de unde rezultă concluzia.

8. Se notează $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ și se demonstrează relația obținută.

9. Alegem arbitrar două clase X și Y ; este suficient să arătăm că acestea au același număr de elevi. Să presupunem prin absurd că în clasa X sunt mai mulți elevi decât în clasa Y . Cum fiecare elev din clasa X cunoaște exact un elev din clasa Y , vor exista măcar doi elevi din clasa X – numiți de exemplu A și B – ce cunosc același elev C din clasa Y . Atunci elevul C cunoaște din aceeași clasă X doi elevi, anume A și B în contradicție cu ipoteza.

10. Elementele mulțimii A sunt nedivizibile cu 3, deci au forma $3k+1, 3k+2, 3k+4, 3k+5, \dots$

11. Discutați pe ultima cifră

12. (\Rightarrow) (reducere la absurd: presupuneți că ab este impar); (\Leftarrow) (studiați paritățile posibile ale lui a și b și folosiți (rețineți) următorul rezultat $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$