Inegalități
- material pentru clasa a VII-a –

- Metoda directă – constă în efectuarea calculelor şi transformarea inegalităților aduse la forma cea mai simplă după care se foloseşte ipoteza sau proprietatea $(A-B)^2 \geq 0$ sau faptul că o sumă de pătrate este mai mare sau egală cu 0.

1. Dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci $a^2+1 \geq 2a$.
2. Dacă $a \in \mathbf{R}^*_+$, atunci $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$.
3. Dacă a, b, $c \in \mathbf{R}$, atunci $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

(Ind. Inmulțim inegalitatea cu 2 şi grupăm astfel încât să obținem o sumă de pătrate ≥ 0).

- Metoda reducerii la absurd

4. Dacă a, b, $c \in (0,1)$ să se demonstreze că cel puțin unul din numerele a(1-b), b(1-c), c(1-a) este mai mic sau egal cu $\frac{1}{4}$.

(Indicație: Presupunem că a(1-b), b(1-c), c(1-a) sunt mai mari decât $\frac{1}{4}$. Facem produsul lor şi regrupăm după $a(1-a) > \frac{1}{4}$, facem calcule şi obținem $(A-B)^2 < 0$ deci inegalitate falsă).

- Metodă bazată pe implicații

$a \leq b$ şi $c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d$, unde a, b, c, d sunt numere reale. Inegalitatea devine egalitate dacă şi numai dacă a=b şi c=d

$0 \leq a \leq b$ şi $0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive. Inegalitatea devine egalitate dacă şi numai dacă a=b şi c=d.

Aceste inegalități sunt valabile şi în cazul a n inegalități.

$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$

5. a) Să se demonstreze că : $\frac{x+n}{n+1} \geq \frac{n+3}{2x+n+1}$, $\forall n, x \in N^*$

   b) Să se determine $x \in N$ pentru care este verificată egalitatea:

$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+...+\frac{x+2009}{2010}=\frac{5}{2x+3}+\frac{6}{2x+4}+...+\frac{2013}{2x+2011}$

(Indicație: a) $x \in N \Rightarrow x \geq 1$, adunând n obțineți membrul stâng, formați si membrul drept şi obțineți inegalitatea; b) se aplică a) pt. n=1, 2, ...).

6. Fie numerele $a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{2009}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2010}$ şi

   $b=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-...-\frac{2009}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2010}$.

   a) determinați o relație între a şi b;
   b) arătați că a<1;

c) arătați că b< $\frac{1}{2^{2009}}$.

(Indicație: b) calculați $a+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010}$, c) analog)

7. Să se arate că: $n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})\geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, pentru orice număr natural n≥1.

(Indicație: notati x= $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ şi inegalitatea se transformă într-o inegalitate simplu de demonstrat)

- Metoda bazată pe reducerea la o inegalitate cunoscută sau înlocuirea în inegalități cunoscute

Inegalități remarcabile:

1. Inegalitatea lui Bernoulli

Fie a≥-1, n $\in N^*$, atunci $(1+a)^n \geq 1+na$

2. Inegalitatea mediilor:0≤ min(a,b)≤m_h≤m_g≤m_a≤m_p≤max(a,b)

$m_h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ **(media armonică);** $m_g=\sqrt{ab}$ **(media geometrică);** $m_a=\frac{a+b}{2}$ **(media aritmetică);**

$m_p=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ **(media pătratică)**

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq \sqrt{ab}\leq \frac{a+b}{2}\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Şi dacă 0<a<b, atunci a< $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq \sqrt{ab}\leq \frac{a+b}{2}\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ < b (egalitatea are loc dacă a=b).

3. Identitatea lui Lagrange

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

sau

$$\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)=(a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

4. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz (CBS)

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq (ac+bd)^2$ **sau** $\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}\right)\geq (a_1b_1+a_2b_2)^2$

În general:

$\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\ldots+a_n^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\ldots+b_n^{\,2}\right)\geq \left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$

5. Inegalitatea lui Minkovski

$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\geq \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2}$

6. Inegalitatea lui Cebâşeav

I. Dacă $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ şi $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$, $n\in N^*$

Atunci: $\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}$

II. Dacă $a_1\leq a_2\leq...\leq a_n$ şi $b_1\geq b_2\geq...\geq b_n$, $n\in N^*$

Atunci: $\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}$

8. Dacă a,b,c$\in$R, atunci: $\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$
(Indicație: aplicați inegalitatea lui Minkovski)
9. Dacă a,b,c$\in R_+$, atunci $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$
(Indicație: aplicați inegalitatea mediilor)
10. Fie $A=\left\{\min\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\middle| x+y=4; x,y\in R_+\right\}$ şi

$B=\{x\in Z | a=\sqrt{16x^4+32x^3+16x^2+49}$ şi a este minim$\}$. Calculați aria patrulaterului determinat de elementele mulțimii $(A\cup\{2\})$xB.
(Indicație: aplicați inegalitatea mediilor pt.m_h şi m_a)

11. Dacă a, b, c, u, v sunt numere pozitive şi u+v≥2, arătați că:

a) $a(a+bu+cv)+b(b+cu+av)+c(c+au+bv)\leq\frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2$

b) $\left(\frac{a}{a+bu+cv}+\frac{b}{b+cu+av}+\frac{c}{c+au+bv}\right)\cdot\left(a(a+bu+cv)+b(b+cu+av)+c(c+au+bv)\right)\geq(a+b+c)^2$

c) $\frac{a}{a+bu+cv}+\frac{b}{b+cu+av}+\frac{c}{c+au+bv}\geq\frac{3}{1+u+v}$

Indicație:
a) Se arată că

$$a(a+bu+cv)+b(b+cu+av)+c(c+au+bv)=\frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2-\frac{u+v-2}{3}\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

şi cum u+v≥2 rezultă concluzia.
b) Aplicând CBS se obține inegalitatea cerută
c) Folosind a) şi b) se obține: $\frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2\left(\frac{a}{a+bu+cv}+\frac{b}{b+cu+av}+\frac{c}{c+au+bv}\right)\geq(a+b+c)^2$,

de unde concluzia este imediată.

12. Fie a,b$\in(0,\infty)$ cu proprietatea $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=5$. Să se arate că $\frac{b^2}{a^2b^2+1}+\frac{c^2}{b^2c^2+1}+\frac{a^2}{c^2a^2+1}\leq\frac{5}{2}$

(Indicație: aplicați inegalitatea mediilor m_h şi m_g pentru b^2 şi $\frac{1}{a^2}$, c^2 şi $\frac{1}{b^2}$, a^2 şi $\frac{1}{c^2}$).

13. Să se demonstreze că pentru orice numere reale pozitive au loc inegalitățile:

a) $a+b\geq2\sqrt{ab}$, b) $a+\frac{1}{a}\geq2$, c) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq2$, d) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab$, e) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq6$,

f) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$, g) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, h) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc$

i) $6>\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ind.: aplicați g)); j) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$; l)dacă a+b+c=1, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$

14. Se dă expresia $E=\frac{(a+5)^2-(a-5)^2}{(2a+5)^2+(2a-5)^2}$, $a\in R$

a) Să se simplifice expresia E; b) Să se demonstreze că $E\leq\frac{1}{2},\forall a\in R$

15. Fie a, b, c numere reale astfel încât a+b+c=6p. Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2\geq 12p^2$.

16. Fie a, b, c lungimile laturilor unui ΔABC.
a) Să se determine natura ΔABC dacă are loc relația $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$
b) Dacă c are valoare constantă, iar expresia (p-a)(p-b) are valoare maximă, să se demonstreze că triunghiul este isoscel (s-a notat cu p semiperimetrul triunghiului).

17. a) Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru, pătratul are aria maximă,
b) Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu aceeași arie, pătratul are perimetrul minim,
c) Fie a lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, iar S aria sa. Să se demonstreze că dacă $\frac{a}{2}\leq\sqrt{S}$, atunci triunghiul este isoscel.

Indicație:

a) Fie a,b dimensiunile dreptunghiului și P-perimetrul, A-aria
Din $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ (inegalitatea mediilor) $\Rightarrow ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\Rightarrow A=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, condiția de maxim este echivalent cu condiția de egalitate)
b) P=2a+2b$\geq 4\sqrt{ab}=4\sqrt{A}$; perimetrul este minim dacă a=b, deci dreptunghiul este pătrat;
c) Ridicând relația dată la pătrat și aplicând teorema lui Pitagora, obțineți cerința.