

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc următoarele legi de compoziție $a * b = a + b + ab$ și $a \circ b = a + b - ab$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

- 5p** a) Se consideră mulțimea $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -1\}$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x * y \in H$.
- 5p** b) Se consideră mulțimea $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x \circ y \in G$.
- 5p** c) Să se demonstreze că legile de compoziție „ $*$ ” și „ \circ ” sunt asociative pe \mathbb{Z} .
- 5p** d) Să se demonstreze că legile de compoziție „ $*$ ” și „ \circ ” admit același element neutru $e \in \mathbb{Z}$.
- 5p** e) Să se demonstreze că $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ și $e = 0$ are loc inegalitatea $\left(a * \frac{1}{a}\right) \left(a \circ \frac{1}{a}\right) \geq (e * 1) \circ (e \circ 1) + 2$.
- 5p** f) Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația $(x * x)(x \circ x) = 3$.