

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legile de compoziție $x \circ y = x + y - 4$ și

$$x \perp y = xy - 4(x + y) + 20, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- 5p** a) Să se demonstreze că $x \perp y \geq 4$ pentru oricare $x, y \in [4, +\infty)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ \perp ” este asociativă pe \mathbb{R} .
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, \perp)$ formează o structură de grup comutativ.
- 5p** d) Să se demonstreze că $x \perp (y \circ z) = (x \perp y) \circ (x \perp z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 5p** e) Folosind eventual inegalitatea $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}, \forall a, b \in (0, +\infty)$, să se demonstreze că
- $$2 \cdot \frac{(x \perp y) - 4}{(x \circ y) - 4} \leq \sqrt{xy - 4x - 4y + 16}, \quad \forall x, y \in (4, +\infty).$$
- 5p** f) Să se calculeze valoarea numărului $A = 1 \perp 2 \perp 3 \perp \dots \perp 2008$.