

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice

$$M = \left\{ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

5p a) Să se arate că dacă $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, atunci $B \in M$.

5p b) Să se arate că matricea $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .

5p c) Să se calculeze $\det(A + 2I_3)$.

5p d) Să se arate că A^2 este inversa matricei A .

5p e) Să se determine $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ din ecuația matriceală $(A + I_3) \cdot Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

5p f) Fie $X, Y \in M$, $X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^*$ și cu proprietatea că $XY = YX$.

Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sunt în progresie geometrică de rație $q \in \mathbb{R}$, atunci și numerele x, y, z sunt în progresie geometrică de aceeași rație q .