

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p

a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p

b) Să se demonstreze că $A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, unde $A^3 = A^2 \cdot A$.

5p

c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2 - 8A + 12I_2 = O_2$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

5p

a) Să se demonstreze că $a^3 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}_6$.

5p

b) Să se demonstreze, utilizând eventual metoda inducției matematice, că $a^{2n+1} = a$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}_6$.

5p

c) Să se calculeze $\widehat{1^{2007}} + \widehat{2^{2007}} + \widehat{3^{2007}} + \widehat{4^{2007}}$.