

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice

$$G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid X^2 = X \right\}, \text{ unde } X^2 = X \cdot X.$$

5p a) Să se verifice că $A \in G$.

5p b) Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice, că $A^n = A$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

5p c) Să se demonstreze că $(2X - I_2)^2 = I_2$, oricare ar fi $X \in G$.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy - \sqrt{2008}(x + y) + 2008 + \sqrt{2008}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se arate că $x * y = (x - \sqrt{2008})(y - \sqrt{2008}) + \sqrt{2008}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „*” pe mulțimea \mathbb{R} .

5p c) Știind că legea de compoziție „*” este asociativă, să se calculeze

$$(-\sqrt{2008}) * (-\sqrt{2007}) * \dots * 0 * \dots * (\sqrt{2007}) * (\sqrt{2008}).$$