

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $A = B + I_3$.

5p **b)** Să se demonstreze că matricea A este inversabilă și să se determine A^{-1} .

5p **c)** Să se determine numărul real a astfel încât $\det X(a) = (2a - 1)^3$, unde $X(a) = I_3 + aA$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} se consideră legea de compoziție asociativă definită astfel $x * y = 2xy - 2i(x + y) - 2 + i$, unde $i^2 = -1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x * y = 2(x - i)(y - i) + i$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

5p **b)** Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n = 2^{n-1}(x_1 - i)(x_2 - i) \dots (x_n - i) + i$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și oricare ar fi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

5p **c)** Să se calculeze $i * \frac{i}{2} * \frac{i^2}{3} * \frac{i^3}{4} * \dots * \frac{i^{2007}}{2008}$.