

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notăm $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{\text{de } n \text{ ori}}$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se demonstreze că matricea X este inversabilă.

5p b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $X^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se determine numărul real r astfel încât $X^3 = 3X^2 + rX + I_3$.

2. Pe mulțimea \mathbb{C} se consideră legea de compoziție $z_1 * z_2 = z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$.

5p a) Să se verifice că $z_1 * z_2 = (z_1 + i)(z_2 + i) - i$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

5p b) Să se rezolve ecuația $\underbrace{z * z * \dots * z}_{\text{de } n \text{ ori}} = -i$, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, știind că legea „ $*$ ” este asociativă.

5p c) Să se demonstreze că $z_1 * z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.