

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine numerele a, b și c astfel încât $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p b) Să se determine inversa matricei F .

5p c) Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $F^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$,

unde $F^n = \underbrace{F \cdot F \cdot \dots \cdot F}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.

5p a) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p b) Să se arate că $x * y = xy + (1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x * (1-x) * x * (1-x) = 0$.