

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^* \right\}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Notăm cu X^t transpusa matricei X .

5p a) Să se calculeze $\det(A^t \cdot A)$.

5p b) Să se demonstreze că, pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$ din M , are loc egalitatea

$$\det(X \cdot X^t) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix}^2.$$

5p c) Să se demonstreze că, pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$ din M cu $\det(X \cdot X^t) = 0$, are loc relația

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

2. Se consideră legea de compoziție pe \mathbb{Z} definită prin $x \circ y = xy - x - y + 2$.

5p a) Să se arate că legea “ \circ ” este asociativă.

5p b) Să se arate că $x \circ y \in (1, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (1, +\infty)$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x \circ a = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.