

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ .

5p a) Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , să se verifice că  $AB \neq BA$ .

5p b) Să se demonstreze că dacă  $A, B \in M$ , atunci  $AB \in M$ .

5p c) Să se demonstreze că dacă  $X \in M$  și  $AX = XA$  pentru orice  $A \in M$ , atunci există  $p \in \mathbb{Z}$  astfel încât

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideră polinomul  $f = (X^2 - 3X + 1)^2 - a^2$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .

5p a) Dacă  $a = 0$  să se determine rădăcinile polinomului  $f$ .

5p b) Să se verifice că  $f = (X^2 - 3X + 1 + a)(X^2 - 3X + 1 - a)$ .

5p c) Să se determine valorile lui  $a$  pentru care polinomul  $f$  are toate rădăcinile reale.