

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a \\ x + by + b^2z = b \\ x + cy + c^2z = c \end{cases}$$
, unde a, b, c sunt numere reale, distincte două

câte două.

5p a) Să se rezolve sistemul pentru $a = 0$, $b = 1$ și $c = 2$.

5p b) Să se verifice că $\det A = (a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

5p c) Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale a, b și c .

2. Se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Pentru $A \in M$

se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că dacă $A, B \in M$, atunci $AB \in M$.

5p b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $A^n = a^{n-1} \cdot A$, oricare ar fi $A \in M$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se rezolve în M ecuația $A + A^2 + \dots + A^{2008} = \begin{pmatrix} 2^{2010} - 4 & 2 - 2^{2009} \\ 2^{2010} - 4 & 2 - 2^{2009} \end{pmatrix}$.