

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și funcția  $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,

$$f(X) = X^2 - 3X + I_3, \text{ unde } X^2 = X \cdot X.$$

**5p**     **a)** Să se calculeze  $\det(I_3 + B)$ .

**5p**     **b)** Să se demonstreze că  $f(A) = I_3 + B$ .

**5p**     **c)** Utilizând metoda inducției matematice să se arate că  $(f(A))^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$ , oricare ar fi

numărul natural  $n \geq 1$ , unde  $(f(A))^n = \underbrace{f(A) \cdot f(A) \cdot \dots \cdot f(A)}_{\text{de } n \text{ ori}}$ .

2. Pe mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$  se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 3$  și

$$x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3.$$

**5p**     **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația  $x \circ x = x * x$ .

**5p**     **b)** Să se determine numărul întreg  $a$  cu proprietatea că  $x \circ a = 3$ , oricare ar fi numărul întreg  $x$ .

**5p**     **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații  $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbb{Z}$ .