

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Pentru orice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X \cdot X = X^2$. Să se calculeze suma $A^2 + B^2$.

5p b) Să se verifice că $A = I_3 + B$.

5p c) Să se demonstreze prin metoda inducției matematice că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$,

unde $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

2. Pe mulțimea \mathbb{C} a numerelor complexe se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + i(x + y) - 1 - i$.

5p a) Să se calculeze $(1 - i) \circ i$.

5p b) Să se verifice dacă $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x \circ x \circ x = x$, știind că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă.