

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 81$.

5p b) Pentru $a = 3$, să se calculeze $A^2 + A^3$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $A^3 = A^2 \cdot A$.

5p c) Să se demonstreze prin metoda inducției matematice că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{pmatrix}$,

oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, unde $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

2. Fie mulțimea $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a^2 - 2b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p a) Să se verifice care dintre numerele următoare $3 + 2\sqrt{2}$, $3 - 2\sqrt{2}$ și $1 + \sqrt{2}$ aparțin mulțimii G .

5p b) Să se arate că înmulțirea numerelor reale este o lege de compoziție internă pe G .

5p c) Arătați că orice element din G este simetrizabil.