

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ -2x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$ și numerele

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se demonstreze că $I_{2007} \geq I_{2008}$.

5p c) Să se demonstreze (utilizând, eventual, metoda de integrare prin părți) că $I_{n+1} = \frac{1}{2n \cdot 2^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n$,
pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$