

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \ln x$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine funcțiile f_1 și f_2 .

5p b) Să se determine asimptotele funcției f_0 .

5p c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx$.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_9^{10} f(x) dx > \int_{10}^{11} f(x) dx + \int_{11}^{12} f(x) dx + \dots + \int_{19}^{20} f(x) dx.$$