

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p b) Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .

5p c) Să se determine semnul funcției f știind că numărul $\alpha \in (0, 1)$ este soluție unică a ecuației $f(x) = 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Pentru $n = 2$ să se calculeze $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

5p b) Pentru $n = 5$ să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^a f(x) dx = 0$.

5p c) Calculând în două moduri $\int_0^1 f(x) dx$ să se demonstreze că $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$ pentru

orice $n \in \mathbb{N}^*$.