

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

5p a) Să se determine asimptotele către  $+\infty$  și  $-\infty$  ale funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ .

5p c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe intervalul  $(1, +\infty)$  și concavă pe intervalul  $(-\infty, 1)$ .

2. Pentru orice număr natural nenul  $n$  se consideră funcțiile  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n e^x$  și integralele

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

5p a) Să se calculeze  $I_1$ .

5p b) Să se demonstreze că  $I_n < e$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\frac{I_n + nI_{n-1} + I_{n-2} + (n-2)I_{n-3}}{2} = e$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ .