

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 2 \ln x$ .

**5p**    **a)** Să se calculeze  $f(1) - f'(e)$ .

**5p**    **b)** Să se arate că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $[1, 2]$ .

**5p**    **c)** Folosind faptul că  $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$ , oricare ar fi  $x \in [1, \sqrt{2}]$ , să se demonstreze inegalitatea  $x^2 - x \leq 2 \ln x$ , pentru orice  $x \in [1, \sqrt{2}]$ .

**2.** Se consideră integralele  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  și  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ .

**5p**    **a)** Să se arate că  $I + J = \frac{\pi}{2}$ .

**5p**    **b)** Să se demonstreze că  $J = I = \frac{\pi}{4}$ .

**5p**    **c)** Utilizând inegalitatea  $\sqrt{2(a^2 + b^2)} \geq a + b$  adevărată pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ , să se arate că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$