

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

5p a) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem $\frac{2}{3} \leq f(x) + f(x^2) \leq 4$.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația, în jurul axei Ox , a graficelor funcțiilor $g, h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ și $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.