

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2008} + 2008^x$ .

5p a) Să se determine  $f'(x)$ .

5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

5p c) Utilizând faptul că  $e^7 < 2008 < e^8$  să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$  aparține intervalului  $(49, 64)$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_1^e g(x) dx = 1$ .

5p b) Folosind identitatea  $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$  adevărată pentru orice  $x > 0$ , să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .

5p c) Utilizând inegalitatea  $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$ , adevărată pentru orice  $x \in [1, e]$ , să se arate că  $\ln \frac{e^2 + 1}{2} \geq \frac{e + 1}{e}$ .