

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.

5p a) Să se verifice că $f(1) + f(e) = \frac{2e}{1+e}$.

5p b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2}.$$

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ și $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se arate că $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției g diferă de funcția f printr-o constantă.

5p c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$.