

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2 - 1}{4}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se arate că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se demonstreze că $I_n \leq e - 1$ pentru orice $n \geq 1$.