

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_0, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f_0(x) = (x^2 + x)e^x$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x}$.

5p b) Să se demonstreze că $f_n(x) = (x^2 + (2n+1)x + n^2)e^x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și pentru orice $x \in \mathbb{R}$, utilizând metoda inducției matematice.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f'_3(x)}{f_3(x)} - 1 \right)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se rezolve ecuația $\int_0^x \frac{t^2 + 1}{e^t} f(t) dt = 2$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \int_0^x f(t) dt$.

5p c) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.