

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

5p a) Să se verifice că $f(0) + f'(0) = \frac{3}{4}$.

5p b) Știind că derivata a doua a funcției f este pozitivă, să se demonstreze că $f'(x) \leq \frac{2e}{9}$, pentru orice $x \in [0,1]$.

5p c) Să se demonstreze că $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$, $\forall x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = e^{-x}$ și $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

5p a) Să se arate că $F(x) = -f(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe \mathbb{R} .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t^2) dt$.