

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x) = 4x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 12$

2. Se consideră funcțiile $I_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $I_0(x) = e^x$ și $I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t) dt$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze $I_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{I_2(x)}{x+1}$.

5p **c)** Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $I_n(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și pentru orice $n \geq 2$.