

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcțiile  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date prin  $f_0(x) = e^{-x} - 1$  și  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

5p a) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  a graficului funcției  $f_0$ .

5p b) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $f_0(x) - f_1(x) = 2e^{-x} - x^2$ .

5p c) Să se arate că  $f_n(x) = (-1)^{n-1} f_1(x)$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , utilizând metoda inducției matematice.

2. Se consideră funcțiile  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin  $f(x) = e^{-x} \sin x$  și  $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-x} \cos x$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot f(x) dx$ .

5p b) Să se verifice că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 f(x) dx \leq 1 - \frac{1}{e}$ .