

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

5p a) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f .

5p b) Să se demonstreze că $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(f(x) - \frac{1}{x} \right)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \cos x$.

5p a) Să se determine primitiva $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , având proprietatea $F(0) = 1$.

5p b) Să se determine $x \in [0, \pi]$ astfel încât $\int_0^x f(t) \sin t dt = \frac{1}{2}$.

5p c) Să se arate că $a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx - 2a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.