

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ .

5p a) Să se determine ecuațiile asimptotelor funcției  $f$ .

5p b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$ .

2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + x$ .

5p a) Să se verifice că funcția  $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + \ln x + \frac{x^2}{2}$  este o primitivă a funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$ .

5p c) Să se determine rația progresiei aritmetice având termenul general  $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$ ,  $n \geq 1$ .