

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se calculeze $f'(0) + f'(2)$.

5p c) Să se rezolve în intervalul $[e, +\infty)$ ecuația $f(\ln x) = 6$.

2. Se consideră funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f_0(x) = e^x$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se verifice că $f_1(x) - f_2(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x f_0(x) dx$.

5p c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$f_{n+1}(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$