

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$.

5p a) Să se calculeze $f(1) + f\left(\frac{1}{e}\right)$.

5p b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot f'(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ date prin $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

5p a) Să se calculeze primitivele funcției $f + g$.

5p b) Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}$.