

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

5p b) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$ pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f'(x))$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $I_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $I_0(x) = 1$ și $I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t) dt$.

5p a) Să se calculeze $I_1(1) + I_1(2)$.

5p b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $I_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției I_4 , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.