

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

5p a) Să se calculeze derivata funcției f .

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \leq -4$ pentru orice $x < -1$.

2. Se consideră funcțiile $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $f_n(x) = e^{-x} x^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și

$g_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $g_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f_n(t) dt$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x) dx$.

5p b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 1$.

5p c) Să se demonstreze că $g_n(x) = -\frac{1}{n!} e^{-x} x^n + g_{n-1}(x)$ pentru orice $x \geq 0$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.