

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p) – Varianta 075**

- 1.** Se consideră  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$  și funcția  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$ .
- 5p**     **a)** Să se studieze monotonia funcției  $f$ .
- 5p**     **b)** Să se demonstreze că  $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \forall \alpha \in (1, \infty)$ .
- 5p**     **c)** Să se demonstreze că  $2f(x+y) \leq f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0, \infty)$ .
- 2.** Fie funcția  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x}$ .
- 5p**     **a)** Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p**     **b)** Să se calculeze  $\int_1^4 f^2(x)[x] dx$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ .
- 5p**     **c)** Să se arate că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dat de  $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) - \int_0^n f(x) dx$ , este convergent.