

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 073

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$.

5p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$ în punctul $(1, h(1))$.

5p c) Să se arate că $f(x) > g(x), \forall x \in (0, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt.$$

5p a) Să se arate că $f_1^2(x) = 2f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf_n(x) + 1}{f_{n+1}(x) + 2}$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g: [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$, $g(x) = f_1(x) \sin x$ în jurul axei Ox .