

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 069

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$.

5p a) Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.

5p b) Să arate că, pentru orice $k \in (0, \infty)$, există $c \in (k, k+1)$ astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - f(n)$, este strict descrescător.

2. Fie funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5}$, unde $F(x) = \int_0^x f(t) dt, x \in [0, +\infty)$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 \ln(1+x) dx \leq \frac{5}{12}$.