

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 062

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$.

5p a) Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

5p b) Să se arate că ecuația $f_n(x) = 0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.

5p c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x) dx \leq 2^n \pi$.