

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 060

1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$ și $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

5p a) Să se demonstreze că $\ln 2$ este cea mai mică valoare a funcției f .

5p b) Să se arate că, pentru orice $x > 0$, este verificată relația $(e^{f(x)} - 1)g'(x) = 1$.

5p c) Să se demonstreze că $g(x) < x$, pentru orice $x > 0$.

2. Fie mulțimea $M = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x) dx = f(0) = f(1) \right\}$.

5p a) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ face parte din mulțimea M .

5p b) Să se arate că dacă f este o funcție polinomială de grad trei, care aparține lui M , atunci $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$.

5p c) Să se arate că, pentru orice $f \in M$, ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0, 1)$.