

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p) – Varianta 033**

1. Fie funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  și șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f'$  este strict crescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

5p b) Să se demonstreze că  $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

5p c) Să se demonstreze că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este convergent.

2. Se consideră funcțiile  $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \int_0^x t^n \arctg t \, dt$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se determine  $f_1(x)$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

5p b) Să arate că  $f_n(1) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(1)$ .