

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 009

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x - \sin x - n$.

5p a) Să se arate că funcția f_n este strict crescătoare.

5p b) Să se arate că, dacă se notează x_n unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$, atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$, unde șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ a fost definit la b).

2. Fie funcțiile $f, g_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1-x}, g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g_2(x)) dx$.

5p b) Să se arate că $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$.