

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p) – Varianta 058

1. Fie $a, b, c, d > 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că dacă $\det A = 0$, atunci f este funcție constantă.

5p b) Să se arate că, dacă $\det A \neq 0$, atunci funcția f este injectivă.

5p c) Să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{I_2 + aA + bB \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq -1\}$.

5p a) Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p b) Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p c) Să se arate că ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții în G .