Concursul interjudețean de matematică
’’Memorialul Alexandru Cojocaru’’
- ediția a V-a, martie 2006 -

Clasa a IX-a

1. Fie a,b,c $\in$ R astfel incat $|ax^2+bx+c|\le 1$,pentru orice x$\in [-1,1]$. Sa se arate ca $|2ax+b|\le 4$ pentru orice x$\in [-1,1]$.

Dan Radu, Bucuresti

Solutie :

Fie $f(x)=ax^2+bx+c,$

$f(0)=c,\ f(1)=a+b+c,\ f(-1)=a-b+c$

atunci : $2a=f(1)+f(-1)-2f(0), b=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1)$

……….2p

Se obtine:

$$|2ax+b|=\left|(f(1)+f(-1)-2f(0))x+\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))\right|=\left|f(1)(x+\frac{1}{2})+f(-1)(x-\frac{1}{2})-2xf(0)\right|\le$$

……….1p

$$\le |f(1)|\left|x+\frac{1}{2}\right|+|f(-1)|\left|x-\frac{1}{2}\right|+2|f(0)|\,|x|\le\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|+2|x|=g(x)$$

……….2p

$$g(x)=\begin{cases}-4x, x\in[-1,-\frac{1}{2}]\\ -2x+1, x\in(-\frac{1}{2},0]\\ 2x+1, x\in(0,\frac{1}{2})\\ 4x, x\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

Avem $2\le g(x)\le 4$ pentru $x\in[-\frac{1}{2},-1]\cup[\frac{1}{2},1]$ si $1\le g(x)\le 2$ pentru $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

Rezulta $|2ax+b|\le 4$ pentru orice $x\in[-1,1]$.

……….2p

2. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ progresie aritmetica de ratie pozitiva. Sa se rezolve in R ecuatia :

$$\sum_{i=1}^{2005}\left|x-a_{2i}\right| = \sum_{i=1}^{2005}\left|x-a_{2i+1}\right|$$

Paul Georgescu, Gabriel Popa, Iasi

Solutie:

Fie $r>0$ ratia progresiei. Ecuatia devine $\sum_{i=1}^{2005}(\left|x-a_{2i}\right|-\left|x-a_{2i+1}\right|)=0$

$$\left|x-2a_{2i}\right|-\left|x-a_{2i+1}\right| = \begin{cases} r, x\geq a_{2i+1} \\ 2x-(a_{2i}+a_{2i+1}, x\in[a_{2i},a_{2i+1}] \\ -r, x<a_{2i} \end{cases}$$

………2p

Ecuatia nu are solutii pe $(-\infty, a_2]\bigcup[a_{2*2005+1},+\infty)$

………1p

Pentru $x\in[a_{2k},a_{2k+1}), k=\overline{1,2005}$ se obtine

$\underbrace{r+r+\ldots+r}_{(k-1)ori}+(2x-(a_{2k},a_{2k+1}))+r+r+\ldots+r=0$ sau $x=a_1+\dfrac{r(6k-2007)}{2}$

Se impune conditia $x\in[a_{2k},a_{2k+1})$ de unde $k=1003$ si $x=a_1+\dfrac{4011r}{2}=a_{2006}+\dfrac{r}{2}$

………2p

Pentru $x\in[a_{2k-1},a_{2k}), k=\overline{1,2005}$ se obtine

$\underbrace{r+r+\ldots+r}_{k\_ori}+\underbrace{r+r+\ldots+r}_{2005-k}=0 <=> r(2005-2k)=0$ imposibil

Ramane ca ecuatia are solutie unica $x=a_{2006}+\dfrac{r}{2}$

………2p

3. Se considera un triunghi ABC si un numar real $k>1$.Pe laturile BC,CA,AB se aleg punctele D,E,F astfel incat $\frac{BC}{BD}=\frac{CA}{CE}=\frac{AB}{AF}=k$. Se noteaza cu G,H,I intersectiile dreptelor BE si AD,CF si BE,respectiv AD si CF. Sa se discute in functie de k daca exista punctele X,Y,Z pe laturile BC,CA,AB astfel incat H∈ (XY), I∈ (YZ) si G∈ (ZX).

Dan Branzei, Iasi

Solutie :
Proiectand triunghiul pe un anumit plan, se poate obtine un triunghi echilateral, iar rapoartele se mentin prin proiectii. Admitem ca triunghiul ABC este echilateral, de latura 1.

……….3p

Atunci triunghil GHI este echilateral si triunghiul XYZ poate fi cautat, de asemenea, echilateral.

……….1p

Consideram punctele X,Y,Z astfel incat :BX=CY=AZ=$t\in(0,1)$.
Din teorema lui Menelaos se obtine : $\frac{BH}{HE}=k-1$ si $\frac{YE}{YC}=\frac{HE}{HB}*\frac{XB}{XC}$ de unde

$kt=\frac{(k-1)(1-t)}{(k-1)-kt}$ sau $k^2t^2-(k^2-1)t+k-1=0$

………..2p

Pentru ca punctele X,Y,Z sa existe, avand proprietatea din enunt, trebuie ca $\Delta\geq 0$ sau $k^3-3k^2-k-1\geq 0$.

………..1p