Concursul interjudețean de matematică
’’Memorialul Alexandru Cojocaru’’
- ediția a V-a, martie 2006 -

Clasa a X-a

1. Sa se rezolve in R ecuatia:

$\log_2(\sin x)+\log_3(\mathrm{tg}\ x)=\log_4(\cos^2 x)+\log_5(\mathrm{ctg}\ x)$

Dorin Marghidanu,Corabia
(G.M. 2/2005)

<u>Solutie:</u>
Este suficient da determinam solutiile din $[0,2\pi)$.Din conditiile de existenta ale logaritmilor ,$x\in(0,\frac{p}{2})$…………..(1 punct)

Ecuatia devine: $\log_2(\sin x)+\log_3(\mathrm{tg}\ x)=\log_2(\cos x)-\log_5(\mathrm{tg}\ x)$ $\Leftrightarrow$
$\log_2(\mathrm{tg}\ x)+\log_3(\mathrm{tg}\ x)+\log_5(\mathrm{tg}\ x)=0$ …………..(2 puncte)

Consideram $f:(0,\frac{p}{2})\to R$, $f(x)=\log_2(\mathrm{tg}\ x)+\log_3(\mathrm{tg}\ x)+\log_5(\mathrm{tg}\ x)$, care este strict crescatoare

$f(\frac{p}{4})^3=0$; rezulta ca $x_0=\frac{p}{4}$ este unica solutie in $[0,2\pi)$ a ecuatiei…….(3 puncte)

Multimea solutiilor este $\{\frac{p}{4}+2k\pi/\ k\in Z\}$……….(1 punct)

2. Fie z_1, z_2, z_3, $z_4 \in$ C distincte doua cate doua ,de modul 1.Daca exista a$\in$ R \{-1} astfel incat:

$$|az_1 + z_2 + z_3 + z_4|^2 + |z_1 + az_2 + z_3 + z_4|^2 + |z_1 + z_2 + az_3 + z_4|^2 + |z_1 + z_2 + z_3 + az_4|^2 = 4(a-1)^2$$

unde z_1,z_2,z_3,z_4 sunt afixele varfurilor unui dreptunghi.

Marian Ursarescu,Roman

<u>Solutie</u>:

Fie $z=z_1+z_2+z_3+z_4$;avem $\Sigma\ |z+(a-1)z_K|^2 = 4(a-1)^2 \Leftrightarrow$

$$4z\overline{z} + (a-1)z(\overline{z_1} + \overline{z}_2 + \overline{z_3} + \overline{z_4}) + (a-1)\overline{z}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + (a-1)(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2) = 4(a-1)$$

$$\Leftrightarrow\ 4z\overline{z} + z(a-1)z\overline{z} = 0 \quad \Leftrightarrow\ |z|^2(4+2a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow |z|^2 \underbrace{(2a+2)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z=0$$

(4puncte)

Daca $z_1+z_2+z_3+z_4=0$,atunci z_1,z_2,z_3,z_4 sunt varfurile unui paralelogram….

(2 puncte)

Un paralelogram inscriptibil este dreptunghi………………. (1 punct)

3. Fie $P_1,P_2,\ldots..P_{13}$ puncte in plan ,oricare trei necoliniare si toate avand ambele coordonate intregi.Sa se arate ca exista cel putin un triunghi $P_iP_jP_k$ astfel incat centrul sau de greutate sa aiba ambele coordonate intregi.

Vasile Pravat & Titu Zoonaru ,Comanesti
Rec .Mat. 1/2005

<u>Solutie :</u>

Cel putin 5 abscise x_i dau acelasi rest la impartirea prin 3 (principiul cutiei),deci abscisa centrului de greutate este numar intreg,oricum am alege trei indici din multimea A a celor 5 determinanti astfel…. (3 puncte)

Fie M multimea resturilor modulo 3 ale numerelor $\{y_i \mid i\in A\}$.Daca M are 3 elemente ,alegem i,j,k$\in$ A astfel incat $y_1+y_2+y_3\equiv 0+1+2 \pmod 3$ si gata…(2 puncte)

Daca M are 2 elemente, cel putin 3 ordonate dau acelasi rest la impartirea prin 3 si le alegem pe ele……….. (1 punct)

Daca M are un singur element,concluzia este imediata………………(1 punct).