

Concursul de Matematică al Revistei RMCS , Ediția a II a , 4 februarie 2007

Clasa a IV a

1. Pregătindu-se pentru un concurs de matematică , Cătălin a rezolvat 6 probleme în fiecare zi , iar sora lui , Roxana , a rezolvat câte 4 probleme în fiecare zi . Cei doi frați au rezolvat împreună 180 de probleme.

a) Câte probleme a rezolvat Roxana ? ;

b) Câte zile ar trebui să mai lucreze Roxana la matematică , în același ritm , pentru a avea rezolvate tot atâtea probleme ca și fratele său ?

2. Andrei are exact 5 ani . Peste 5 ani , vârsta sa va fi exact de trei ori mai mică decât vârsta mamei sale din acel moment , iar a bunicului de două ori mai mare decât a fiicei salei.Ce vârstă are acum bunicul lui Andrei ?

3. Lucia scrie un număr pe tablă . Alina șterge numărul și scrie unul de patru ori mai mare. Lucia șterge și ea acest număr și scrie unul de trei ori mai mare decât al Alinei.Alina șterge din nou și ea tabla și scrie numărul 100 care este cu 4 mai mare decât ultimul număr scris de Lucia pe tablă.

Ce număr a scris Lucia la început ?

4. Compuneți și rezolvați o problemă a cărei rezolvare începe astfel :

$$40 + \nabla = \square$$

$$\square + \nabla = 80$$

(în locul semnelor ∇ și \square trebuie alese numere) .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 2 ore

Concursul de Matematică al Revistei RMCS , Ediția a II a , 4 februarie 2007

Clasa a V a

1. Să se determine numerele naturale nenule care împărțite la 4 dau câtul a și restul b , iar împărțite la 7 dau câtul b și restul a .

2. Un dicționar de limba engleză costă cât 6 cărți de matematică , 2 cărți de matematică costă cât o carte de povești și 3 stilouri costă cât 2 dicționare de limba engleză. Avem bani să cumpărăm exact 3 stilouri , dar vrem să cumpărăm numai cărți de povești. Câte cărți de povești putem cumpăra ?

3. Fiecare element al mulțimii $A = \{1,2,3,\dots,2007\}$ se colorează cu una dintre culorile roșu și galben respectând următoarele reguli :

- a) Suma dintre orice număr colorat cu roșu și orice număr colorat cu galben este un număr impar ;
- b) Suma oricăror două numere colorate cu roșu este un număr par ;
- c) Numărul 7 este colorat cu galben.

- 1) Să se arate că numărul 2007 este colorat cu galben ;
- 2) Să se calculeze suma tuturor numerelor colorate cu roșu .

4. Se consideră o mulțime M de numere naturale care satisface următoarele proprietăți :

- a) $16 \in M$;
- b) Dacă $4x \in M$, atunci $x \in M$;
- c) Dacă $x \in M$, atunci $(4x+1) \in M$ și $(4x+3) \in M$.

Să se arate că :

- 1) $65 \in M$;
- 2) $125 \in M$;
- 3) $2007 \in M$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 2 ore

Concursul de Matematică al Revistei RMCS , Ediția a II a , 4 februarie 2007

Clasa a VI a

1. Să se determine numerele naturale nenule a, b, c pentru care avem :

$$\frac{2a}{a+2} = \frac{3b}{b+3} = \frac{a+b+c}{a+b}$$

2. Pe un cerc se așează la întâmplare 4 numere naturale a căror sumă este egală cu 21. Să se arate că există cel puțin două numere alăturate a și b pe cerc astfel încât $a + b \geq 11$.

3. Pe o dreaptă d se consideră , în această ordine , punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ astfel încât $A_1A_7 = 12$ cm , $A_6A_7 = 2$ cm , A_4 este mijlocul segmentului (A_1A_7) și al segmentului (A_3A_5) , A_2 este mijlocul segmentului (A_1A_3) și A_6 este mijlocul segmentului (A_5A_7) . Punctele A_1, A_3, A_5, A_7 se colorează cu albastru , iar punctele A_2, A_4, A_6 se colorează cu galben .

- a) Câte segmente cu extremitățile colorate albastru au lungimea mai mare de 5 cm și câte segmente cu extremitățile colorate cu galben au lungimea mai mică de 5cm ?
- b) Câte segmente cu extremitățile de culori diferite au lungimile egale ?

4. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C (în această ordine) și de aceeași parte a dreptei d punctele D, E, F, G, H astfel încât (BD) este bisectoarea unghiului $\angle CBE$, (BF) este bisectoarea unghiului $\angle EBG$ și (BH) este bisectoarea unghiului $\angle GBA$.

Dacă măsurile unghiurilor $\angle CBD, \angle EBF, \angle GBH$ sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive , să se calculeze măsura unghiului $\angle EBG$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 2 ore

Concursul de Matematică al Revistei RMCS , Ediția a II a , 4 februarie 2007

Clasa a VII a

1. Să se determine numerele naturale a, b, c pentru care sunt îndeplinite simultan condițiile :

$$1) \quad \frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+3}{4} ;$$

$$2) \quad \frac{1}{a+1} + \frac{3}{b+2} + \frac{2}{c+3} \in \mathbf{N} .$$

2. O mulțime nevidă A de numere naturale are proprietatea că pentru orice $x \in A$ avem : $(x-2) \in A$ sau $\frac{x}{3} \in A$.

Să se arate că :

a) $3 \notin A$;

b) Dacă $10 \in A$, atunci $0 \in A$.

3. Într-un triunghi ABC se notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor interioare , cu M și N mijloacele laturilor (AB) , respectiv (AC) , iar cu P și Q intersecțiile dreptei MN cu dreptele BI și respectiv CI . Știind că $PQ = \frac{AI}{2}$, să se determine măsura unghiului $\angle PAQ$.

4. Triunghiul isoscel ABC are măsura unghiului $\angle BAC$ egală cu 120° .Se consideră un punct D pe semidreapta $(BC$ astfel încât $C \in (BD)$ și $m(\angle CAD) = 15^\circ$.Dacă E este piciorul înălțimii din D a triunghiului ADC ,cu $E \in AC$, să se arate că există un număr natural k astfel încât $BC = k \cdot CE$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 3 ore

Concursul de Matematică al Revistei RMCS , Ediția a II a , 4 februarie 2007

Clasa a VIII a

1. a) Să se determine perechile (x, y) de numere întregi pentru care avem :

$$2x^2 + 3y^2 + 4xy = 9 ;$$

- b) Să se arate că nu există numere întregi x și y pentru care

$$2x^2 + 3y^2 = 1000 .$$

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ care satisface simultan proprietățile :

a) $f(x - y) = f(x) - f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}$;

b) $f(3^k) = 3^{k-1}$, $\forall k \in \mathbf{N}$.

Să se arate că $f(2007) \in \mathbf{Z}$.

3. a) Să se arate că există cel puțin trei numere $x \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$ pentru care $\sqrt{x - x^2} \in \mathbf{Q}$;

- b) Să se arate că există cel puțin 2007 numere $x \in \mathbf{Q}$ pentru care $\sqrt{x - x^2} \in \mathbf{Q}$.

4. a) Se consideră un triunghi echilateral ABC și pe planul (ABC) se ridică perpendicularele AA' și BB' (de aceeași parte a planului) astfel încât $AA' = AB$ și $BB' = \frac{1}{2}AB$. Să se determine măsura unghiului dintre planele (ABC) și $(A'B'C)$.

- b) Să se stabilească dacă se pot numerota muchiile unui cub cu numere naturale de la 1 la 12 astfel încât suma numerelor corespunzătoare celor 3 muchii care pleacă dintr-un același vârf să fie constantă .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru : 3 ore