MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşița, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

100 2010 Anul Matematicii in Şcoala Românească www.anulmatematicii.ro

CLASA A VIII-A

I. a) $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\ldots+\sqrt{2^{2008}}\right)}{\sqrt{2^{2010}}-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\ldots+\sqrt{2^{2008}}}{\sqrt{2^{2009}}-1}$ 1p

$\frac{a}{b}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\ldots+\sqrt{2^{2008}}\right)}{\left(\sqrt{2^{2009}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2^{2009}}-1}{\left(\sqrt{2^{2009}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\sqrt{2}+1$......................2p

b) $A=\frac{1+a\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)}{a+4\sqrt{3}+7}-4\cdot\frac{1+b\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{b+\sqrt{3}+2}=\frac{1+a\cdot\frac{1}{7+4\sqrt{3}}}{a+4\sqrt{3}+7}-4\cdot\frac{1+b\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3}}}{b+\sqrt{3}+2}$ 2p

$A=\frac{\frac{a+4\sqrt{3}+7}{7+4\sqrt{3}}}{a+4\sqrt{3}+7}-4\cdot\frac{\frac{b+\sqrt{3}+2}{2+\sqrt{3}}}{b+\sqrt{3}+2}=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}-\frac{4}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}-4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$ 2p

II. a) $a^2+2010=a^2+ab+ac+bc=\left(a+b\right)\left(a+c\right)$..1p

$b^2+2010=b^2+ab+ac+bc=\left(a+b\right)\left(b+c\right)$...1p

$c^2+2010=c^2+ab+ac+bc=\left(b+c\right)\left(a+c\right)$..1p

$\sqrt{\left(a^2+2010\right)\left(b^2+2010\right)\left(c^2+2010\right)}=\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)$..1p

b) Deduce că $a+b+2=\mathrm{M}_3$, $b+c+7=\mathrm{M}_3$ şi $c+a+8=\mathrm{M}_3$ de unde $a+b=\mathrm{M}_3+1$, $b+c=\mathrm{M}_3+2$ şi $c+a=\mathrm{M}_3+1$ 1p

Arată că $2(a+b+c)=\mathrm{M}_3+1$ şi apoi deduce că $a=\mathrm{M}_3$, $b=\mathrm{M}_3+1$ şi $c=\mathrm{M}_3+1$ 1p

$a^2+b^2+c^2=\mathrm{M}_3+1+\mathrm{M}_3+1+\mathrm{M}_3=\mathrm{M}_3+2$

Cum un pătrat perfect nu poate fi de forma M_3+2 deduce că numărul $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ este un număr irațional...1p

III. a) $2\left(x^2+y^2\right)\geq\left(x+y\right)^2\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\geq 0$ pentru orice x şi y, cu egalitate dacă $x=y$. 1p

b) Deduce că $x+y\leq\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$, ...1p

de unde rezultă $a+b\leq d_1\sqrt{2}, b+c\leq d_2\sqrt{2}, c+a\leq d_3\sqrt{2}$ 2p

de unde prin însumare rezultă relația cerută...1p

cu egalitate dacă $a=b=c$ (cub) 1p

IV. a) $\left.\begin{array}{l}BD\perp AC\\ AA'\perp BD\Rightarrow BD\perp AA'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}BD\perp\left(AA'C\right)\\ A'C\subset\left(AA'C\right)\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp A'C$ 1p

b) Dacă $Q\in\left(A'C\right)$ astfel încât $\frac{C'Q}{A'Q}=\frac{1}{3}$ deduce $O'Q=\frac{\sqrt{2}}{4}$ şi $OQ=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 1p

Construieşte $A'P\perp OQ, P\in\left(OQ\right)$

Cum $\left.\begin{array}{l}BD\perp\left(AA'C\right)\\ A'P\subset\left(AA'C\right)\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp A'P\Rightarrow A'P\perp BD$, deduce că $A'P\perp\left(BDQ\right)$...…………...1p

BAREM DE NOTARE ŞI CORECTARE

Notă:
Orice altă soluție corectă se notează corespunzător.

În triunghiul $\Delta A'OQ$, $A'P \cdot OQ = OO' \cdot A'Q \Rightarrow A'P = 1cm \Rightarrow d(A', OQ) = 1cm$ 1p

c) Deduce că $MO \perp BD$, unde punctul O este centrul pătratului ABCD şi

$\mathrm{A}_{\Delta BMD} = \frac{BD \cdot MO}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot MO}{2}$ minimă $\Rightarrow MO$ minimă. Cum O este punct fix, MO minimă $\Rightarrow MO \perp A'C$ 1p

$\Delta CMO \sim \Delta CAA' \Rightarrow \frac{CM}{AC} = \frac{CO}{A'C} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 1p

Finalizare $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3} cm.$ 1p

BAREM DE NOTARE ŞI CORECTARE

Notă:
Orice altă soluție corectă se notează corespunzător.