MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşița, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

100
2010
Anul Matematicii în Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

CLASA A VII-A

I.

a) $x^2 \cdot \sqrt{(y-1)^2} = 7^2 \cdot 41$ — 1p

$x^2 = 49 \Rightarrow x \in \{-7, 7\}$ şi

$|y-1| = 41 \Rightarrow y \in \{-40, 42\}$ — 1p

$S = \{ (-7,-40) ; (-7,42) ; (7,-40) ; (7,42) \}$ — 1p

b) $\frac{1}{49} \cdot \left[\frac{1}{41}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{42} + \frac{1}{42} - \frac{1}{83} + \ldots + \frac{1}{1969} - \frac{1}{2010}\right)\right] = \frac{1}{49 \cdot 41} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2010}\right) = \frac{1}{2010}$ — 1p

$\frac{1}{p}\left(\frac{1005a+670b+402b+30a}{2010}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{1035a+1072b}{2010}\right)$ — 1p

$1035a + 1072b \leq 37$, — 1p

$a = -1$; $b = 1$; $p = 37$. — 1p

II.

$\frac{a_1}{\frac{1}{6}} = \frac{a_2}{\frac{1}{12}} = \frac{a_3}{\frac{1}{20}} = \cdots = \frac{a_n}{\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}} = \frac{5760\cdot(n+2)\cdot 2}{n}$ — 2p

$\frac{a_{n-1} - a_n}{\frac{1}{n\cdot(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}} = \frac{40}{\frac{2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}}$ — 1p

$\frac{5760\cdot(n+2)\cdot 2}{n} = 20 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ — 1p

$2^6 \cdot 3^2 = n^2 \cdot (n+1)$ — 1p

$n=8$; $a_1 = 2400$; $a_8 = 160$ — 2p

III. a) DE ∥ AC şi AD $\nparallel$ EC $\Rightarrow$ ADEC este trapez. (1) şi

$\measuredangle$DEM ≡ $\measuredangle$MAC ; $\measuredangle$MDE ≡ $\measuredangle$MCA ($\measuredangle$ alterne – interne) (2) — 1p

AM = 1/2·BC ; ΔAMC isoscel ; $\measuredangle$MAC ≡ $\measuredangle$MCA (3)

ΔADM ≡ ΔCEM — 1p

Din (1) şi [AD] ≡ [CE] $\Rightarrow$ ADEC – trapez isoscel — 1p

b) $\measuredangle$BAD ≡ $\measuredangle$MCA (4) — 1p

(AM – bisectoarea $\measuredangle$DAC $\Rightarrow$ $\measuredangle$DAM ≡ $\measuredangle$MAC, deci

m($\measuredangle$BAD) = m($\measuredangle$DAM) = m($\measuredangle$MAC) = 30° — 1p

$\frac{DM}{MC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$ (din teorema bisectoarei) — 1p

c) ABFM – romb $\Rightarrow$ $\measuredangle$DAM ≡ $\measuredangle$BAD şi

Finalizare, m($\measuredangle$ACB) = 30° — 1p

IV.

a) Fie Q mijlocul segmentului BN.

În ΔBNM, DQ este linie mijlocie — 1p

DQ ∥ MN — 1p

$\left.\begin{array}{l} AD \parallel NQ \\ [AD] \equiv [NQ] \end{array}\right\} \Rightarrow$ ADQN este paralelogram — 1p

DQ ∥ MN şi DQ ∥ AN, conform axiomei paralelelor $\Rightarrow$ A, M, N sunt coliniare — 1p

b) $a+b \leq c+d$ (1) ; $b+c \leq a+d$ (2) ; $c+d \leq a+b$ (3) ; $a+d \leq b+c$ (4)

Din (1) şi (3) $\Rightarrow$ $a+b \leq c+d \leq a+b \Rightarrow a+b = c+d$ (5)

Din (2) şi (4) $\Rightarrow$ $b+c \leq a+d \leq b+c \Rightarrow b+c = a+d$ (6) — 2p

Adunând relațiile (5) şi (6) obținem $a+c+2b = a+c+2d \Rightarrow b = d$ (7)

Din (7) şi (5) $\Rightarrow$ $a = c$ (8). Din relațiile (7) şi (8) obținem ABCD = paralelogram. — 1p

BAREM DE NOTARE ŞI CORECTARE

Notă:
Orice altă soluție corectă se notează corespunzător.